第51卷 第1期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 51 No. 1
2012年 1月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2012

带外生负债的保险公司最优再保险-投资策略*

李婵娟[1]，李仲飞[2,3]，曾 燕[2]
（1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 中山大学岭南学院，广东 广州 510275；
3. 中山大学管理学院，广东 广州 510275）

摘 要：研究了外生负债影响下保险公司的最优再保险-投资策略，其中假设保险公司的目标是最大化终端财富的期望指数效用；盈余过程服从扩散模型；风险资产和负债均由几何布朗运动刻画。运用随机动态规划方法，得到了保险公司在（i）进行投资且允许购买比例再保险或获取新业务，（ii）进行投资但只允许购买比例再保险，不能获取新业务，两种情形下的最优再保险-投资策略以及最优值函数的解析式。最后，采用数值算例阐述了外生负债与市场参数对最优策略的影响。

关键词：投资组合；再保险；资产负债管理；最大化效用；外生负债

中图分类号：O224 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2012）01-0001-08

Optimal Reinsurance-Investment Strategy for an Insurer with Exogenous Liability

LI Chanjuan[1], *LI Zhongfei*[2,3], *ZENG Yan*[2]
(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Lingnan (University) School, Research Center for Financial Engineering and Risk Management, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
3. School of Business, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The optimal reinsurance-investment strategy for an insurer with an exogenous liability is considered. Assume that the aim of the insurer is to maximize the expected exponential utility of the terminal wealth; the surplus process of the insurer follows a diffusion model while the risky assets' prices and the exogenous liability are governed by geometric Brownian motions. By employing the stochastic dynamic programming, the closed form of the optimal reinsurance-investment strategy and the optimal value function are derived under two cases: (i) the insurer can invest in a financial market and purchase proportional reinsurance or acquire new business, (ii) the insurer can invest in a financial market and purchase proportional reinsurance, but not acquire new business. Finally, a numerical example is given to show the impact of the exogenous liability and the market parameters on the optimal strategy.

Key words: portfolio; reinsurance; asset-liability management; utility maximization; exogenous liability

近年来，在各种目标函数下研究保险公司的最优再保险与投资问题正逐渐成为保险精算的研究热点，其中最常用的目标函数有最大化保险公司终端财富期望效用和最小化破产概率[1-4]。另外，一些学者研究了不同市场下保险公司的最优再保险-投资问题[5-6]。同时，也有部分学者采用 Markowitz

* 收稿日期：2011-06-29
基金项目：国家杰出青年科学基金资助项目（70825002）；国家973计划资助项目（2007CB814902）；2011年度中山大学人文社会科学青年教师桐山基金资助项目；中国博士后科学基金资助项目（2011M501351）
作者简介：李婵娟（1984年生），女，博士生；通讯作者：李仲飞；E-mail：lnslzf@mail.sysu.edu.cn

的均值-方差准则作为保险公司的决策目标[7-8]。

现实中，任何个体和机构投资者都可能面临负债。目前已有不少学者研究了投资者的资产负债管理问题。例如，文［9］研究了面临负债的投资者在离散多期均值-方差模型下的最优投资问题，其中的负债可以是内生或者外生的；文［10-11］研究了连续时间均值-方差框架下带外生负债投资者的最优投资问题；文［12-13］将资产负债管理问题拓展到机制转移市场的情形，投资者仍采用均值-方差准则作为目标。上述文献中的风险资产价格均服从几何布朗运动，外生负债由几何布朗运动或带漂移的布朗运动刻画。另外，文［14］研究了基准准则和均值-方差准则下连续时间资产负债管理问题。

对保险公司而言，一方面，由于保险公司的特性，可以将保单的未来赔付看作保险公司的内生负债。文［15］解释了将保险公司的未来赔付看作负债的含义，此时的负债与市场无关，且负债的风险不能被完全对冲。另一方面，保险公司还需偿付外生的负债，如文［16］考虑了需要偿还固定利率债务的保险公司的最优比例再保险与股利分配问题。因此，研究带外生负债的保险公司的最优再保险-投资策略具有重要的现实意义。然而，目前研究带外生负债保险公司资产配置的文献并不多。文［17］从资产负债平衡的角度研究了保险公司的产品设计和投资策略。文［18］研究了离散时间框架下保险公司的资产负债管理。文［19］研究了面临外生负债的保险公司的最优均值-方差投资策略。

以上文献或只考虑了保险公司的再保险与投资决策，或只考虑了保险公司面临外生负债时的投资决策，而没有考虑再保险。事实上，再保险是保险公司分散风险的一种有效手段。当保险公司面临外生负债时，购买再保险仍是其分散风险的有效措施。鉴于此，为了弥补现有研究的空白，本文考虑了在面临外生负债的情形下，保险公司如何在一个连续的计划期内选择再保险-投资策略，以最大化其终端财富的期望指数效用。风险资产和外生负债均由几何布朗运动刻画，盈余服从扩散模型。运用随机动态规划方法，得到了最优策略以及相应最优值函数的解析式。

本文结构如下，第二节建立基本的市场模型，给出了保险公司的盈余过程以及金融资产和外生负债的动态方程；第三节是模型求解，分别给出保险公司在对再保险策略进行不同限制时，面临外生负债的保险公司的最优再保险-投资策略的求解过程以及解的显式表达式；第四节通过数值算例阐述了外生负债与市场参数对最优策略与最优值函数的影响。

1 模型建立

给定完备赋流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, P)$，其中 T 为有限正常数，表示计划期的长度；$\mathcal{F}_t$ 表示到时刻 t 为止所获得的信息总和，时刻 t 的决策基于信息流 $\mathcal{F}_t$。下文中所引入的随机过程均为定义在该概率空间上的适应过程。

当考虑大型保险公司投资组合时，单个索赔相对公司盈余规模来说非常小。本文类似于文［1-4，8］，采用扩散模型来刻画保险公司的盈余过程，即 $\mathrm{d}R(t)=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_0(t)$，其中，$\mu>0$ 为保险业务的保费收益率；$\sigma_0>0$ 表示保险业务的风险水平；$\{W_0(t)\}$ 为一维标准布朗运动。

假设金融市场由1个无风险资产与 n 个风险资产组成。无风险资产的价格过程服从如下方程

$$\mathrm{d}P_0(t)=r_0(t)P_0(t)\mathrm{d}t, P_0(0)=p_0$$

其中，$p_0>0$ 为无风险资产的初始价格；$r_0(t)$ 为确定性连续正值函数，表示无风险利率。第 i（$i=1,\cdots,n$）个风险资产价格过程服从如下方程

$$\mathrm{d}P_i(t)=P_i(t)\left[\tilde{r}_i(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t)\right],$$
$$P_i(0)=p_i$$

其中，$p_i>0$ 为风险资产的初始价格；$\tilde{r}_i(t)$ 以及 $\sigma_{ij}(t)$ 均为确定性连续正值函数，表示风险资产的收益率与波动率，且 $\tilde{r}_i(t)>r_0(t)$；$\{W(t)\}=\{(W_1(t),\cdots,W_n(t))^{\mathrm{T}}\}$ 是 n 维标准布朗运动，且 $\{W(t)\}$ 与 $\{W_0(t)\}$ 相互独立。这里“T”表示向量或矩阵的转置。

假设保险公司在计划期［0，T］内将其盈余连续地投资到这 $n+1$ 个资产上，且不考虑金融市场上的交易费和买卖差价。记 $b_i(t)$ 为时刻 t 保险公司投资到第 i 个风险资产上的金额，$b(t):=(b_1(t),\cdots,b_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为保险公司的投资组合。除投资外，为了控制风险，保险公司将会在计划期［0，T］内连续地购买比例再保险或获取新业务，例如作为其它保险公司的再保险公司（见文［3，7-8］）。记 $a(t)$ 为时刻 t 保险公司购买比例再保险或获取新业务的自留水平，$a(t)\in[0,+\infty)$，$t\in[0,T]$。$a(t)\in[0,1]$ 对应购买比例再保险，此时保险公司只承担时刻 t 索赔的 $a(t)$ 倍，索赔的 $1-a(t)$ 倍由再保险公司承担；为此，保险公司需要将自身保费收入的 $(1-a(t))\theta$ 支付给再保险公司，$\theta>\mu$ 为再保险业务的保费收益率。$a(t)\in(1,+\infty)$ 对应保

险公司获取新业务。为叙述方便，称随机过程 $\{a(t):t\in[0,T]\}$ 为保险公司的再保险策略。进一步，记保险公司时刻 t 的再保险-投资策略为 $\pi(t)=(a(t),b(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。

当采取策略 $\pi(t)$ 时，记 $X^{\pi}(t)$ 为保险公司在时刻 t 的盈余。若保险公司的初始盈余为 x_0，则其盈余过程为

$$dX^{\pi}(t)=[r_0(t)X^{\pi}(t)+\theta a(t)+r(t)^{\mathrm{T}}b(t)+m]\mathrm{d}t+\sigma_0 a(t)\mathrm{d}W_0(t)+b(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t)\mathrm{d}W(t)$$

其中，$m=\mu-\theta, r(t)=(r_1(t),\cdots,r_n(t))^{\mathrm{T}}$，$r_i(t)=\tilde{r}_i(t)-r_0(t)(i=1,\cdots,n)$ 为第 i 个风险资产的超额收益率，$\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))_{n\times n}$。进一步，假设 $\forall t\in[0,T]$，$\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}}>\delta I,\delta$ 为某一正常数，I 为 $n\times n$ 维单位阵。

考虑到外生负债的非负性，许多文献采用几何布朗运动刻画负债过程，如文［10，13，19］。类似地，本文假设保险公司在［0，T］内所面临的外生负债 $L(t)$ 也服从几何布朗运动，其价值过程服从如下方程

$$\mathrm{d}L(t)=L(t)[\beta(t)\mathrm{d}t+\gamma(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}W(t)],L(0)=l_0 \tag{1}$$

其中，$l_0>0$ 为外生负债的初始值；$\beta(t)$ 与 $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\cdots,\gamma_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为确定性连续函数。这里外生负债值不受保险公司决策过程的影响。

从而，当面临外生负债时，保险公司在任意时刻 t 的盈余为 $S^{\pi}(t)=X^{\pi}(t)-L(t)$，满足

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S^{\pi}(t)&=[r_0(t)S^{\pi}(t)+L(t)(r_0(t)-\beta(t))+r(t)^{\mathrm{T}}b(t)+\theta a(t)+m]\mathrm{d}t+\sigma_0 a(t)\mathrm{d}W_0(t)+\\&[b(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t)-L(t)\gamma(t)^{\mathrm{T}}]\mathrm{d}W(t),\\ S(0)&=s_0\equiv x_0-l_0\end{aligned}$$

其中，$L(t)$ 服从方程（1）。

称策略 $\pi=\{\pi(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 为允许策略，如果对任意 $t\in[0,T],a(t)\geqslant 0,\pi(t)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测，且 $E\int_0^{\infty}\pi(t)^{\mathrm{T}}\pi(t)\mathrm{d}t\leqslant\infty$。记 Π 为所有允许策略的集合。

2　模型求解

本节分别在保险公司（i）进行投资且允许购买比例再保险或获取新业务，（ii）进行投资和购买比例再保险，不可获取新业务，两种情形下求解了外生负债影响下保险公司的最优再保险-投资策略。

2.1　可获取新业务

假设保险公司的目标是最大化终端盈余的期望效用，所采用的效用函数为 $U(x)=\lambda_0-\frac{h}{\eta}\mathrm{e}^{-\eta x}$，其中，$h>0$，$\eta>0$。相应的优化问题可写为

$$\max_{\pi\in\Pi}E[U(S^{\pi}(T))\mid S(0)=s_0,L(0)=l_0] \tag{2}$$

此时保险公司的再保险行为包含购买比例再保险或获取新业务。优化问题（2）的最优值函数记为

$$V(t,s,l)=\max_{\pi\in\Pi}E[U(S^{\pi}(T))\mid S^{\pi}(t)=s,L(t)=l]$$

类似于文［20］中的推导过程，可得关于 $V(t,s,l)$ 的 Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程，即

$$0=D(V(t,s,l))+\max_{a(t)\in[0,+\infty]}D_1(V(t,s,l),a(t))+\max_{a(t)}D_2(V(t,s,l)),b(t)) \tag{3}$$

其中，$(t,s,l)\in[0,T)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}$，边界条件为 $V(T,s,l)=U(s)$，对于任意二阶连续可微函数 $G(t,s,l)$ 以及函数 $d(t)$ 和 $e(t)$，算子 D,D_1,D_2 如下定义：

$$D(G(t,s,l))=G_t+G_s[r_0(t)s+l(r_0(t)-\beta(t))+m]+G_l l\beta(t)+\frac{1}{2}G_{ll}l^2\gamma(t)^{\mathrm{T}}\gamma(t);$$

$$D_1(G(t,s,l),d(t))=G_s\theta d(t)+\frac{1}{2}G_{ss}\delta_0^2 d(t)^2;$$

$$\begin{aligned}D_2(G(t,s,l),e(t))&=G_s r(t)^{\mathrm{T}}e(t)+\\&\frac{1}{2}G_{ss}[\sigma(t)^{\mathrm{T}}e(t)-l\gamma(t)]^{\mathrm{T}}[\sigma(t)^{\mathrm{T}}e(t)-l\gamma(t)]+\\&G_{sl}l\gamma(t)^{\mathrm{T}}[\sigma(t)^{\mathrm{T}}e(t)-l\gamma(t)]\end{aligned}$$

记 $a^*(t)$ 和 $b^*(t)$ 为上述方程中两个极大值问题的极值点。

下面定理给出 HJB 方程（3）的解。

定理 1　HJB 方程（3）的解是 $v(t,s,l)=\lambda_0-\frac{h}{\eta}c(t)\exp\{-\eta g(t)(s+\gamma(t)l)\}$，其中 $\forall t\in[0,T]$，

$$c(t)=\exp\left\{\frac{\theta^2}{2\sigma_0^2}(t-T)-\int_t^T m\eta\mathrm{e}^{\int_s^T r_0(u)\mathrm{d}u}+\frac{1}{2}r(s)^{\mathrm{T}}(\sigma(s)\sigma(s)^{\mathrm{T}})^{-1}r(s)\mathrm{d}s\right\} \tag{4}$$

$$g(t)=\exp\left\{\int_t^T r_0(s)\mathrm{d}s\right\} \tag{5}$$

$$\gamma(t)=1-\exp\{\int_t^T-r_0(s)+\beta(s)-r(s)^{\mathrm{T}}(\sigma(s)\cdot\sigma(s)^{\mathrm{T}})^{-1}\sigma(s)\gamma(s)\mathrm{d}s\} \tag{6}$$

同时

$$a^*(t)=\frac{1}{\eta g(t)}\frac{\theta}{\sigma_0^2},$$

$$b^*(t)=(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\left(\frac{r(t)}{\eta g(t)}-(\gamma(t)-1)L(t)\sigma(t)\gamma(t)\right) \tag{7}$$

其中，$L(t)$ 是随机微分方程（1）的解。

证明 猜测 HJB 方程（3）的解具有如下形式

$$v(t,s,l) = \lambda_0 - \frac{h}{\eta}c(t)\exp\{-\eta g(t)(s+\gamma(t)l)\} \tag{8}$$

其中，$c(t)$，$g(t)$，$\gamma(t)$ 为待定函数且 $\forall t \in [0, T]$，满足 $c(t) > 0, g(t) > 0, c(T) = 1, g(T) = 1, \gamma(T) = 0$。则有 $v_s > 0$ 和 $v_{ss} < 0$。根据方程（3）中的极值问题的一阶条件，有

$$a^*(t) = -\frac{v_s}{v_{ss}}\frac{\theta}{\sigma_0^2},$$

$$b^*(t) = -\frac{1}{v_{ss}}(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot [v_s r(t) + (v_{sl} - v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)] \tag{9}$$

将 $a^*(t)$ 和 $b^*(t)$ 代入方程（3）中可得

$$v_t + v_s[r_0(t)s + l(r_0(t) - \beta(t)) + m] + v_l l\beta(t) + \left(\frac{1}{2}v_{ss} - v_{sl} + \frac{1}{2}v_{ll}\right)l^2\gamma(t)^{\mathrm{T}}\gamma(t) + \left\{-\frac{v_s^2\theta^2}{2v_{ss}\sigma_0^2}\right\} + \left(-\frac{1}{2v_{ss}}\right)\{v_s r(t) + (v_{sl} - v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)\}^{\mathrm{T}} \cdot (\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}\{v_s r(t) + (v_{sl} - v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)\} = 0 \tag{10}$$

将（8）式代入上式，经整理可得 $c(t), g(t), \gamma(t)$ 满足如下方程组：

$$\frac{c'(t)}{c(t)} - \eta g(t)m - \frac{\theta^2}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{2}r(t)^{\mathrm{T}} \cdot (\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}r(t) = 0, c(T) = 1 \tag{11}$$

$$g'(t) + g(t)r_0(t) = 0, g(T) = 1 \tag{12}$$

$$-\eta g'(t)\gamma(t) - \eta g(t)\gamma'(t) - \eta g(t) \cdot (r_0(t) - \beta(t)) - \eta g(t)\gamma(t)\beta(t) + \eta g(t)(\gamma(t) - 1)r(t)^{\mathrm{T}}(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1} \cdot \sigma(t)\gamma(t) = 0, \gamma(T) = 0 \tag{13}$$

逐个求解方程（11）-（13）得解为（4）-（6）。

从而，HJB 方程（3）的解为（8）式，其系数由（4）-（6）式给出。将（8）式代入（9）式即得（7）式。证毕。

接下来给出最优解的验证定理。

定理2 设 $v(t,s,l), a^*(t), b^*(t)$ 由定理1给定，则 $V(t,s,l) = v(t,s,l)$，且策略 $\pi^*(t) = (a^*(t), b^*(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是优化问题（2）的最优再保险-投资策略。

证明 对任意的允许策略 $\pi(t) = (a(t), b(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，应用 Itô 公式，有

$$v(T, S^\pi(T), L(T)) = v(t,s,l) + \int_t^T D(v(u,s,l)) + D_1(u,s,l), a(u)) + D_2(v(u,s,l), b(u))\mathrm{d}u + \int_t^T v_s\sigma_0 a(u)\mathrm{d}W_0(u) + \int_t^T v_s[\sigma(u)^{\mathrm{T}}b(u) - L(u)\gamma(u)]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}W(u) + \int_t^T v_l L(u)\gamma(u)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}W(u)$$

因为 $v(t,s,l)$ 是 HJB 方程的解，且 $v(T, S^\pi(T), L(T)) = U(S^\pi(T))$，所以

$$U(S^\pi(T)) \leqslant v(t,s,l) + \int_t^T v_s\sigma_0 a(u)\mathrm{d}W_0(u) + \int_t^T [v_s(\sigma(u)^{\mathrm{T}}b(u) - L(u)\gamma(u)) + v_l L(u)\gamma(u)]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}W(u)$$

对上面不等式的两端取条件期望，注意到 Itô 积分是鞅，我们有

$$V(t,s,l) = \max_\pi E[U(S^\pi(T)) \mid S^\pi(t) = s, L(t) = l] \leqslant v(t,s,l)$$

另一方面，因为 $\pi^*(t) = (a^*(t), b^*(t)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 使得 HJB 方程（3）的右端达到最大值且等于0，所以当采取策略 $\pi^*(t)$ 时，上式变为等式。证毕。

注1 为考察外生负债参数对最优投资策略的影响，考虑函数 $r_0(t), r(t), \sigma(t), \beta(t), \gamma(t)$ 不随时间变化，即均为常量的情形。此时，

$$\gamma(t) = 1 - \exp\{(-r_0 + \beta - r^{\mathrm{T}}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\sigma\gamma)(T-t)\}$$

最优投资策略为

$$b^*(t) = \frac{1}{\eta}\exp\{-r_0(T-t)\}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}r + L(t)(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\sigma\gamma\exp\{(-r_0 + \beta - r^{\mathrm{T}}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}\sigma\gamma)(T-t)\}$$

可以看到最优投资策略是一个反馈控制，依赖于当前外生负债值。策略中的第一项是没有外生负债时使得终端财富期望效用达到最大的投资组合。第二项与外生负债有关，且当其他参数不变而 β 增大时，$b^*(t)$ 随之增大，这说明当外生负债较大时保险公司将在风险资产上投资更多的资金。这是由公司的资本结构决定的。当保险公司的财务杠杆增大，也就是外生负债与资产比率增大时，公司的决策者倾向于投资回报率较高的风险资产。

注2 容易得到，当保险公司不涉及外生负债时，其最优再保险-投资策略为

$$a^*(t) = \frac{1}{\eta g(t)}\frac{\theta}{\sigma_0^2},$$

$$b^*(t) = \frac{1}{\eta g(t)}(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}r(t) \tag{14}$$

可以看到，外生负债只影响保险公司的最优投资策略，对最优再保险策略没有影响。这是因为驱动索赔过程的布朗运动与驱动外生负债过程的布朗运动相互独立，保险公司面临外生负债与否不会影响其最优再保险策略。进一步，当保险公司再保险策略

恒为 1 时，最优投资策略 $b^*(t)$ 仍由（14）式给出。此时结论与文［1］中 $\rho=0$ 时的特殊情形相同。

2.2 不可获取新业务

这里限定保险公司只能投资和购买再保险，不可获取新业务。保险市场的设定不变。保险公司所面临的问题仍为选择再保险-投资策略，使其终端盈余期望效用最大，效用仍然采用 2.1 节的指数效用。与前一节不同的是，此时的允许策略集变为

$$\Pi_1=\{\pi(t)=(a(t),b(t)^{\mathrm T})^{\mathrm T},t\in[0,T]:a(t)\in[0,1],\pi(t)\text{ 是}\mathcal F_t\text{ 可测的},$$

$$\forall t\in[0,T],\text{且 }E\int_0^\infty \pi(t)^{\mathrm T}\pi(t)\mathrm dt\leqslant\infty\}$$

问题（2）变为

$$\max_{\pi\in\Pi_1}E[U(S^\pi(T))\mid S(0)=s_0,L(0)=l_0]$$

最优值函数为 $V(t,s,l)=\max_{\pi\in\Pi_1}E[U(S^\pi(T))\mid S^\pi(t)=s,L(t)=l]$。类似地，关于 $V(t,s,l)$ 的 HJB 方程为

$$0=D(V(t,s,l))+\max_{a(t)\in[0,1]}D_1(V(t,s,l),a(t))+\max_{b(t)}D_2(V(t,s,l),b(t))\tag{15}$$

其中，$(t,s,l)\in[0,T)\times\mathbb R\times\mathbb R^+$，边界条件为 $V(T,s,l)=U(s)$，映射 D,D_1,D_2 的定义与 2.1 节相同。

设 $\tilde v(t,s,l)$ 为方程（15）的解，且满足 $\tilde v_s>0$，$\tilde v_{ss}<0$。记 $\tilde a^*(t)$ 和 $\tilde b^*(t)$ 为方程（15）中两个极大值问题的极值点，则 $\tilde b^*(t)=-\frac{1}{\tilde v_{ss}}(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm T})^{-1}[\tilde v_s r(t)+(\tilde v_{sl}-\tilde v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)]$。注意到极值问题 $\max_{a(t)\in[0,1]}\{D_1\tilde v(t,s,l),a(t))\}$ 的驻点为 $\hat a(t)=-\frac{\tilde v_s\theta}{\tilde v_{ss}\sigma_0^2}>0$，从而当 $\hat a(t)\in[0,1)$ 时，$\tilde a^*(t)=\hat a(t)$；当 $\hat a(t)\geqslant1$ 时，$\tilde a^*(t)=1$。将 $\tilde b^*(t)$ 和不同情形下的 $\tilde a^*(t)$ 代入 HJB 方程（15）中，可得下面两个引理。

引理 1 令 $A_1=\{(t,s,l)\in[0,T)\times\mathbb R\times\mathbb R^+:\hat a(t)\in[0,1)\}$。若 $\tilde v(t,s,l)$ 是下述方程

$$\tilde v_t+\tilde v_s[r_0(t)s+l(r_0(t)-\beta(t))+m]+\tilde v_l l\beta(t)\cdot+\left(\frac12\tilde v_{ss}-\tilde v_{sl}+\frac12\tilde v_{ll}\right)l^2\gamma(t)^{\mathrm T}\gamma(t)+\left(-\frac{\tilde v_s^2\theta^2}{2\tilde v_{ss}\sigma_0^2}\right)+\left(-\frac{1}{2\tilde v_{ss}}\right)[\tilde v_s r(t)+(\tilde v_{sl}-\tilde v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)]^{\mathrm T}\cdot(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm T})^{-1}[\tilde v_s r(t)+(\tilde v_{sl}-\tilde v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)]=0,$$

$$\tilde v(T,s,l)=U(s)\tag{16}$$

在集合 A_1 上的解，且 $\tilde v(t,\cdot,l)$ 是关于 s 的递增凹函数，那么 $\tilde v$ 是 HJB 方程（15）在 A_1 上的解。

引理 2 令 $A_2=\{(t,s,l)\in[0,T)\times\mathbb R\times\mathbb R^+:\hat a(t)\in[1,+\infty)\}$。若 $\tilde v(t,s,l)$ 是下述方程

$$\tilde v_t+\tilde v_s[r_0(t)s+l(r_0(t)-\beta(t))+m]+\tilde v_l l\beta(t)+\left(\frac12\tilde v_{ss}-\tilde v_{sl}+\frac12\tilde v_{ll}\right)l^2\gamma(t)^{\mathrm T}\gamma(t)+\left(\tilde v_s\theta+\frac12\tilde v_{ss}\sigma_0^2\right)+\left(-\frac{1}{2\tilde v_{ss}}\right)[\tilde v_s r(t)+(\tilde v_{sl}-\tilde v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)]^{\mathrm T}\cdot(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm T})^{-1}[\tilde v_s r(t)+(\tilde v_{sl}-\tilde v_{ss})l\sigma(t)\gamma(t)]=0,$$

$$\tilde v(T,s,l)=U(s)\tag{17}$$

在集合 A_2 上的解，且 $\tilde v(t,\cdot,l)$ 是关于 s 的递增凹函数，那么 $\tilde v$ 是 HJB 方程（15）在 A_2 上的解。

根据上述两个引理，可以证明 HJB 方程（15）的解由下面的定理给出。

定理 3 设

$$c_2(t)=\exp\left\{-\int_t^T(m+\theta)\eta g(s)-\frac12\eta^2\sigma_0^2g(s)^2+\frac12 r(s)^{\mathrm T}(\sigma(s)\sigma(s)^{\mathrm T})^{-1}r(s)\,\mathrm ds\right\}\tag{18}$$

$$z_1=\frac{\theta^2}{2\sigma_0^2}(T-t_0)+\int_{t_0}^T-\theta\eta g(s)+\frac12\eta^2\sigma_0^2g(s)^2\mathrm ds,\quad z_2=0\tag{19}$$

其中，$g(t)$ 由（5）式给出，t_0 满足条件

$$\int_{t_0}^T r_0(s)\mathrm ds=\ln\theta-\ln\eta\sigma_0^2\tag{20}$$

HJB 方程（15）的解存在，且

（i）当 $t_0\in[0,T]$ 时，

$$\tilde v(t,s,l)=\begin{cases}v_1(t,s,l)=\lambda_0-\dfrac{h}{\eta}c_1(t)\exp\{-\eta g(t)\cdot(s+\gamma(t)l)+z_1\},t\in[0,t_0),\\ v_2(t,s,l)=\lambda_0-\dfrac{h}{\eta}c_2(t)\exp\{-\eta g(t)\cdot(s+\gamma(t)l)+z_2\},t\in[t_0,T]\end{cases}\tag{21}$$

同时

$$\tilde a^*(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\eta g(t)}\dfrac{\theta}{\sigma_0^2},t\in[0,t_0),\\ 1,t\in[t_0,T],\end{cases}$$

$$\tilde b^*(t)=(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm T})^{-1}\cdot\left(\frac{r(t)}{\eta g(t)}-(\gamma(t)-1)L(t)\sigma(t)\gamma(t)\right)$$

（ii）当 $t_0>T$ 时，$\tilde v(t,s,l)=\lambda_0-\frac{h}{\eta}c_1(t)\exp\{-\eta g(t)(s+\gamma(t)l)\}$，同时

$$\tilde a^*(t)=\frac{1}{\eta g(t)}\frac{\theta}{\sigma_0^2},\tilde b^*(t)=(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm T})^{-1}\cdot\left(\frac{r(t)}{\eta g(t)}-(\gamma(t)-1)L(t)\sigma(t)\gamma(t)\right)$$

(iii) 当 $t_0<0$ 时，$\tilde{v}(t,s,l)=\lambda_0-\dfrac{h}{\eta}c_2(t)$ $\exp\{-\eta g(t)(s+y(t)l)\}$，同时

$$\tilde{a}^*(t)=1,\tilde{b}^*(t)=(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\left(\frac{r(t)}{\eta g(t)}-(y(t)-1)L(t)\sigma(t)\gamma(t)\right)$$

上述各种情形中，$c_1(t),g(t),y(t)$ 分别由（4）-（6）式给出，$L(t)$ 是随机微分方程（1）的解。

证明 注意到 $\tilde{a}^*(t)\in[0,1]$，当 $\hat{a}(t)\in[0,1)$ 时，将 $\tilde{a}^*(t)=\hat{a}(t)$ 和 $\tilde{b}^*(t)$ 代入 HJB 方程（15）中即得方程（16）；当 $\hat{a}(t)\in[1,+\infty)$ 时，将 $\tilde{a}^*(t)=1$ 和 $\tilde{b}^*(t)$ 代入 HJB 方程（15）中即得方程（17）。

我们猜测方程（16）和（17）的解均具有如下形式

$$\tilde{v}(t,s,l)=\lambda_0-\frac{h}{\eta}\tilde{c}(t)\exp\{-\eta\tilde{g}(t)(s+\tilde{y}(t)l)+z\}\tag{22}$$

其中，$\tilde{c}(t),\tilde{g}(t),\tilde{y}(t)$ 为待定函数，满足 $\forall t\in[0,T],\tilde{c}(t)>0,\tilde{g}(t)>0,\tilde{c}(T)=1,\tilde{g}(T)=1,\tilde{y}(T)=0$，$z$ 为待定系数。不同的是，对应于具体的方程，上述的待定参数不同。

首先，当 $\hat{a}(t)\in[0,1)$ 时，$(t,s,l)\in A_1$。将（22）式代入方程（16），可得 $\tilde{c}(t),\tilde{g}(t),\tilde{y}(t)$ 分别由（4）-（6）式给出。

其次，当 $\hat{a}(t)\in[1,+\infty)$ 时，$(t,s,l)\in A_2$。将（22）式代入方程（17），可得 $\tilde{c}(t),\tilde{g}(t)$ 和 $\tilde{y}(t)$ 分别由（18），（5）-（6）式给出。

进一步需要验证由（4）-（6）式所确定的 $\tilde{v}(t,s,l)$ 满足条件 $\hat{a}(t)\in[0,1)$，且由（18），（5）-（6）式所确定的 $\tilde{v}(t,s,l)$ 满足条件 $\hat{a}(t)\in[1,+\infty)$。注意到 $\hat{a}(t)=-\dfrac{\theta}{\eta\sigma_0^2\tilde{g}(t)}$，当 $t<t_0$ 时，$\hat{a}(t)\in(0,1)$；当 $t\geqslant t_0$ 时，$\hat{a}(t)\in[1,+\infty)$，其中 t_0 由等式（20）确定。所以，

(i) 当 $t_0\in[0,T]$ 时，由（4）-（6）式确定的 $\tilde{v}(t,s,l)$，定义为 $\tilde{v}_1(t,s,l)$，是 HJB 方程（15）在区间 $[0,t_0)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上的解，其中 z 待定；由（18），（5）-（6）式确定的 $\tilde{v}(t,s,l)$，定义为 $\tilde{v}_2(t,s,l)$，是 HJB 方程（15）在区间 $[t_0,T)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ 上的解，其中 z 仍待定；

(ii) 当 $t_0>T$ 时，对任意的 $(t,s,l)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，由（4）-（6）式确定的 $\tilde{v}(t,s,l)$ 是 HJB 方程（15）的解，其中 $z=0$；

(iii) 当 $t_0<0$ 时，对任意的 $(t,s,l)\in[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$，由（18），（5）-（6）式确定的 $\tilde{v}(t,s,l)$ 是 HJB 方程（15）的解，其中 $z=0$。

最后仍需分别确定解（22）在区间 $[0,t_0)$ 和 $[t_0,T]$ 上的待定系数 z 的值。为了使得解 $\tilde{v}(\cdot,s,l)$ 在 $[0,T]$ 上二阶连续可微，只需令 $\dfrac{\partial\tilde{v}_1(t_0,s,l)}{\partial t}=\dfrac{\partial\tilde{v}_2(t_0,s,l)}{\partial t}$，$\dfrac{\partial^2\tilde{v}_1(t_0,s,l)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\tilde{v}_2(t_0,s,l)}{\partial t^2}$。经过计算，当 $t\in[0,t_0)$ 时，$z=z_1$；当 $t\in[t_0,T]$ 时，$z=z_2$，其中 z_1 和 z_2 由（19）给出。因此，由（21）给出的 $\tilde{v}(t,s,l)$ 在 $[0,T]$ 上连续。证毕。

注3 为了观察不可获取新业务时计划期的长度对最优再保险策略的影响，考虑无风险收益率 r_0 为常数的情形，此时 $t_0=T-\dfrac{1}{r_0}(\ln\theta-\ln\eta\sigma_0^2)$。可以看到，而只有当 $\eta\leqslant\dfrac{\theta}{\sigma_0^2}$ 时，投资期长度 T 的取值才会影响最优再保险策略，即，当计划期较短（$T<\dfrac{1}{r_0}(\ln\theta-\ln\eta\sigma_0^2)$）时，最优再保险策略为承担所有的索赔；当计划期足够长（$T\geqslant\dfrac{1}{r_0}(\ln\theta-\ln\eta\sigma_0^2)$）时，最优再保险策略为初期购买一定比例的再保险，而在后期承担所有的索赔。

这是由于，当保险公司风险厌恶因子较大（$\eta>\dfrac{\theta}{\sigma_0^2}$）时，无论投资期长短，公司决策者都倾向于购买比例再保险以降低风险；而只有当风险厌恶因子较小时，保险公司才可能愿意承担所有索赔。在后一种情形下，当计划期较短时，保险公司很快达到计划期的终端。此时它的首要任务是使得其终端财富的效用达最大，因此保险公司倾向于承担所有索赔从而尽快累积更多的财富。而当计划期较长时，保险公司有足够的时间累积资金，从而初期它可以通过购买一定的比例再保险使得自己面临的风险降低，而在后期承担所有索赔来累积财富。

注4 当保险公司不涉及到外生负债，且只能购买比例再保险时，其最优的再保险策略不变，由定理3给出，最优投资策略变为：$\tilde{b}^*(t)=(\sigma(t)\sigma(t)^T)^{-1}\dfrac{r(t)}{\eta g(t)}$。同样地，当保险公司只能购买比例再保险时，面临外生负债与否只能影响到公司的最优投资策略，而不影响其最优再保险策略。

文[2]考虑了保险公司最大化终端财富期望指数效用下的最优再保险-投资策略，其中投资受到不允许卖空的限制。根据文[2]的方法，当去

掉其中不允许卖空的限制时，文［2］得到最优再保险-投资策略同本章不考虑外生负债且市场参数 r_0, r, σ 均为常数时得到的策略一致。

解的验证定理与定理 2 相似，从略。

3　数值算例

接下来，我们给出一个数值算例来阐述：（i）外生负债对保险公司最优策略的影响；（ii）获取新业务对最优再保险策略的影响；（iii）市场上各参数对最优策略与最优值函数的影响。

不失一般性，考虑金融市场含有一个无风险资产和一个风险资产且各个参数均为常数的情况。假设保险公司的初始财富 $x_0 = 2$，$l_0 = 0.5$，风险厌恶系数 $\eta = 0.5$，各个参数的基本值为 $\mu = 0.5$，$\sigma_0 = 1$，$\theta = 0.8$，$r_0 = 0.05$，$r_1 = 0.13$，$\sigma_1 = 0.1$，$\beta = 0.08$，$\gamma = 0.05$，$T = 1$。

（i）外生负债对最优策略的影响。

通过对比保险公司面临外生负债和无外生负债两种情况下的最优策略来反映本文所引入的外生负债对保险公司策略的影响。考虑保险公司可以获取新业务的情况。此时保险公司的资产负债管理问题的解由定理 1 给出，纯资产管理问题的解由（14）式给出。

从图 1 的子图 1 - 1 和 1 - 2 可以看到，一方面，保险公司面临外生负债时在风险资产上的投资金额高于无外生负债的情形，这与注 1 的解释一致；另一方面，相对于较短的计划期（$T = 1$），当计划期的长度变大（$T = 20$）时，外生负债对最优投资策略的影响变小。这是因为当计划期较长时，保险公司有足够的时间进行投资，积累更多的财富使得外生负债对公司终端财富盈余的影响变小，从而导致对投资策略的影响变小。

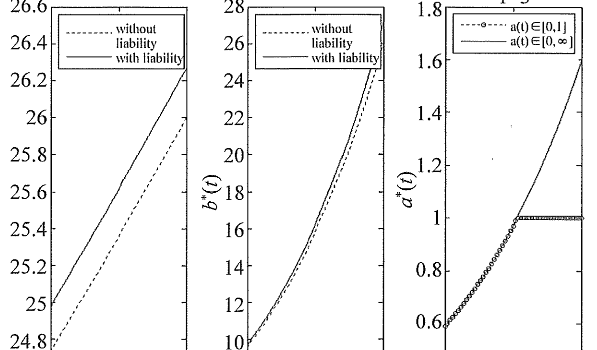

图 1　不同计划期外生负债以及能否获取新业务对最优策略的影响

Fig. 1　The impact of exogenous liability and new business on optimal strategy with different time-horizon

（ii）能否获取新业务对最优再保险策略的影响。

我们只需考虑保险公司不涉及外生负债时，能否获取新业务对最优再保险策略 $a^*(t)$ 的影响。当计划期 $T = 1$ 时，$t_0 = -8.4$，结合定理 1 和定理 3 可知，当可获取新业务时，最优再保险策略为在整个计划期内都开展新业务；不可获取新业务时最优再保险策略为保险公司承担所有的索赔。当 $T = 20$ 时，可获取新业务时的 $a^*(t)$ 由（14）式给出，不可获取新业务时的 $a^*(t)$ 由定理 3 给出。图 1 的子图 1 - 3 描述了能否获取新业务对计划期长度 $T = 20$ 时最优再保险策略的影响。

（iii）市场参数对最优投资策略和最优值函数的影响。

首先考虑保险公司面临外生负债时各市场参数 $r_0, r, \sigma, \beta, \gamma$ 对最优投资策略 $b^*(t)$ 的影响。由图 2 可以看出，$b^*(t)$ 是 r_0, σ 的减函数，是 r, β, γ 的增函数。也就是说，当无风险资产的收益率或者风险资产的波动率增大时，保险公司投资到风险资产上金额减少；当风险资产的超额收益率增大，或者外生负债的漂移率或波动率增大时，保险公司投资到风险资产上的金额增多。

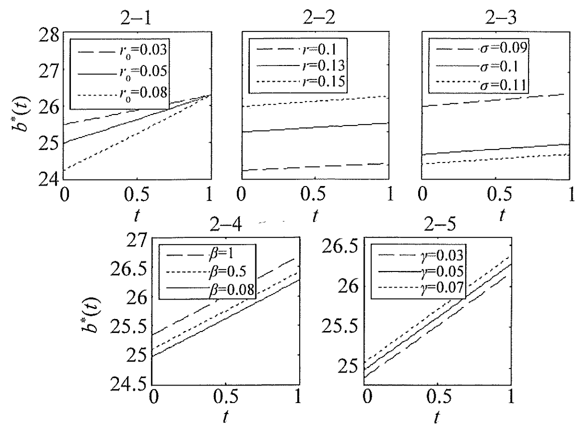

图 2　市场参数对最优投资策略的影响

Fig. 2　The impact of market parameters on optimal strategy

其次考虑保险公司在可获取新业务的情形下市场参数对最优值函数的影响。由图 3 可看出，首先保险公司面临外生负债时最优值函数小于无外生负债时的情形。其次对各参数而言，考虑外生负债时的最优值函数是 r_0, r, γ 的增函数，是 σ, β 的减函数。也就是说，当无风险资产的收益率或风险资产的超额收益率增大，或者外生负债的波动率增大

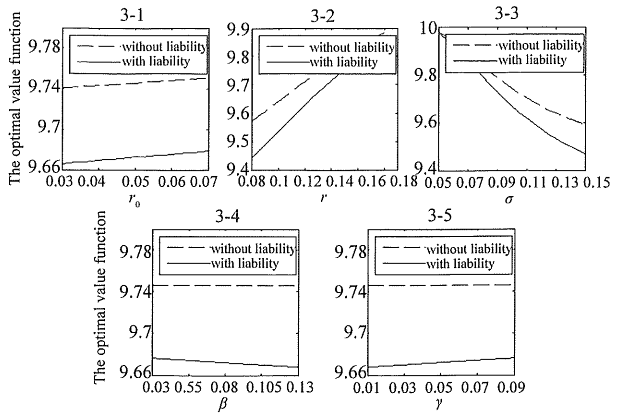

图3 外生负债和市场参数对最优值函数的影响

Fig. 3 The impact of exogenous liability and market parameters on optimal value function

时，保险公司的终端财富期望效用增大；当风险资产的波动率或者外生负债的漂移率增大时，终端财富期望效用减小。

参考文献：

[1] BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing probability of ruin [J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(4): 937 - 958.

[2] BAI L H, GUO J Y. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 968 - 975.

[3] CHEN S M, LI Z F, LI K M. Optimal investment-reinsurance policy for an insurance company with VaR constraint [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, 47: 144 - 153.

[4] 曾燕，李仲飞. 线性约束下保险公司的最优投资策略[J]. 运筹学学报, 2010, 14(2): 66 - 78.

[5] ZHANG X, SIU T K. On optimal proportional reinsurance and investment in a Markovian regime-switching economy [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2011, 27(8): 1 - 16.

[6] LIANG Z B, YUEN K C, GUO J Y. Optimal proportional reinsurance and investment in a stock market with Ornstein-Uhlenbeck process [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, doi: 10. 1016/j. insmatheco. 2011.04.005.

[7] BAUERLE N. Benchmark and mean-variance problems for insurers [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2005, 62: 159 - 165.

[8] ZENY Y, LI Z F. Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 49(1): 145 - 154.

[9] LEIPPOLD M, TROJANI F, VANINI P. A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 28: 1079 - 1113.

[10] CHIU M C, LI D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39: 330 - 355.

[11] XIE S X, LI Z F, WANG S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: mean-variance model and stochastic LQ approach [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 943 - 953.

[12] XIE S X. Continuous-time mean-variance portfolio selection with liability and regime switching [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45: 148 - 155.

[13] CHEN P, YANG H L, YIN G. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: a continuous-time model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43: 456 - 465.

[14] ZENG Y, LI Z F. Asset-liability management under benchmark and mean-variance criteria in a jump diffusion market [J]. Journal of Systems Science & Complexity, 2011, 24: 317 - 327.

[15] HO T. Asset/Liability Management and Enterprise Risk Management of an Insurer [J]. Journal of Investment Management, 2005, 3: 45 - 59.

[16] 袁继红. 比例再保险问题的奇异型最优控制模型[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(1): 53 - 58.

[17] CUMMINS J D, NYE D J. Portfolio optimization models for property-liability insurance companies: an analysis and some extensions [J]. Management Science, 1981, 27(4): 414 - 430.

[18] SBARAGLIA S, PAPI M, BRIANI M, et al. A model for the optimal asset-liability management for insurance companies [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2003, 6: 277 - 299.

[19] WU H L, LI Z F. Asset and liability management for an insurer with jump-diffusion surplus process under mean-variance criterion [C]//Third International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering, 2010: 209 - 213.

[20] FLEMING W H, SONER H M. Controlled Markov processes and viscosity solutions [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006.